Autor: Karol Bołbotowski

Tytuł: Sklepienia optymalne

Abstract:

Pod koniec lat 70tych G.I.N. Rozvany i W. Prager [1] badali zagadnienie optymalnego kształtowania trójwymiarowych sklepień przenoszących pionowe obciążenia śledzące. Celem autorów było uogólnienie rozwiązanego już zadania optymalnego projektowania łuku, a więc dwuwymiarowego odpowiednika sklepienia. W ten sposób narodziło się zagadnienie *optymalnych siatek łukowych.* W oryginalnej pracy [1] przez siatkę łukową rozumiano rodzinę łuków, których linie środkowe układają się na jednej powierzchni. Założono przy tym, że każda linia środkowa zawiera się w płaszczyźnie pionowej, a rzuty tych linii na płaszczyznę poziomą są równoległe do osi ustalonego z góry kartezjańskiego układu współrzędnych. W widoku z góry siatka łukowa jawi się więc jako dwie wzajemnie ortogonalne rodziny prętów. Teoria i metody numeryczne optymalnego kształtowania siatek łukowych zostały dopracowane dopiero 40 lat później, w pracy [2].

Nie ulega wątpliwości, że zawężenie poszukiwań optymalnych sklepień do ortogonalnych siatek łukowych wprowadza silne więzy projektowe. Autorzy pracy [1] nie ukrywali, że ich pierwotną intencją był dobór zarówno powierzchni sklepienia, jak i trajektorii naprężeń, bez brutalnego narzucania ich kierunków. Jako naturalny krok w stronę uogólnienia badań [1,2] należy uznać pracę [3], w której dopuszcza się wiele kierunków łuków zamiast zaledwie dwóch. Tak postawione zagadnienie daje dużo większą swobodę kształtowania sklepień w porównaniu do pierwowzoru. Niniejszy referat skupia się na alternatywnej drodze uogólnienia zagadnienia projektowania sklepień [4]. Uwolnimy się od idei płaskiego łuku jako elementarnego budulca sklepienia.

Punktem wyjściowym będzie zadanie, w którym poszukujemy dowolnej konstrukcji 3D – niekoniecznie koncentrującej się na powierzchni – która optymalnie przenosi obciążenie pionowe. Jedyną cechą tego zagadnienia, która nawiązuje do sklepień optymalnych będzie śledzący charakter obciążeń. Przedstawimy twierdzenie mówiące, że rozwiązaniem tego zrelaksowanego zadania będzie w istocie sklepienie. Dowód jest konstruktywny, gdyż za pomocą zamkniętych wzorów optymalne sklepienie 3D można odtworzyć na podstawie rozwiązania innego zadania: optymalnego projektowania *płaskich* membran. Z dokładnością do odpowiedniego skalowania, kształt zdeformowanej optymalnej membrany tworzy powierzchnię sklepienia, na której rozkład materiału uzyskujemy przez rzutowanie rozkładu materiału membrany. Otrzymujemy ścisły dowód, że tak skonstruowane sklepienia są globalnie optymalne oraz że nie można zaproponować żadnej lepszej konstrukcji 3D, nawet takiej, która nie jest sklepieniem.

Wiedząc, że trójwymiarowe zadanie kształtowania sklepienia możemy sprowadzić do zagadnienia optymalizacji membrany, koncentrujemy się na tym drugim. W ten sposób redukujemy wymiar przestrzeni projektowej, torując sobie drogę do wydajnych metod obliczeniowych. Ponadto, w przypadku zadania optymalnego projektowania membran dysponujemy matematycznie poprawną teorią opracowaną w [5].

[1] Rozvany, G.I.N., Prager, W. (1979) A new class of structural optimization problems: optimal archgrids. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 19:127–150.

[2] Czubacki R., Lewiński T. (2020) Optimal archgrids: a variational setting, Struct. Multidiscip. Optim. 62:1371–1393.

[3] Dzierżanowski, G., Czubacki, R. (2021) Optimal archgrids spanning rectangular domains. Computers & Structures, 242, 106371.

[4] Bołbotowski, K. (2022) Optimal vault problem – form finding through 2D convex program. Comput. Math. Appl., 109:280–324.

[5] Bołbotowski, K., Bouchitté, G. (2022) Optimal design versus maximal Monge-Kantorovich metrics. Arch. Ration. Mech. Anal. 243:1449–1524.