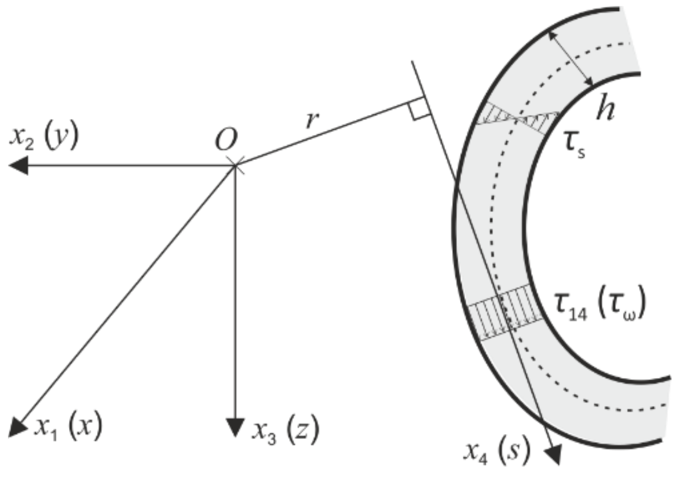
Kazimierz MYŚLECKI

ALTERNATYWNA TEORIA SKRĘCANIA PROSTYCH PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PRZEKROJU OTWARTYM

1.Wprowadzenie

Powszechnie stosowanym narzędziem analizy skręcania prętów cienkościennych jest obecnie teoria Własowa [1, 2, 3]. Jej podstawowym założeniem jest przyjęcie pierwszej pochodnej kąta skręcania (φ') jako miary deplanacji przekroju. Geometrię deplanacji opisuje współrzędna wycinkowa (ω). Takie założenie powoduje pominięcie części energii sprężystej ścinania związanej ze skręcającym momentem giętno-skrętnym (M_ω). Pozostaje jedynie składnik związany ze zwichrzeniem powłokowym. W konsekwencji otrzymuje się jedno różniczkowe równanie równowagi czwartego rzędu wyrażone w przemieszczeniach (φ).
W niniejszym opracowaniu wprowadza się niezależną miarę deplanacji (d) zachowując pozostałe konwencje teorii Własowa. Dzięki temu zostanie uwzględniona energia skręcania giętno-skrętnego i otrzymamy układ dwóch różniczkowych równań równowagi drugiego rzędu wyrażony w przemieszczeniach (φ, d). Można tu zauważyć pewną analogię z teorią zginania belek Eulera-Bernoullego i Timoszenki. Zagadnieniem tym zajęto się również w pracach [4, 5], ale przy innych założeniach.

2. Założenia



Rys. 1. Przyjęte oznaczenia i konwencje

Skręcanie odbywa się względem osi (x) przechodzącej przez środek skręcania (główny biegun O). W tym układzie otrzymujemy następujące przemieszczenia

$$u_1 = d(x)\omega(s), \quad u_4 = \varphi(x)r(s), \tag{1}$$

i konsekwentnie odkształcenia

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} = d'\omega, \quad \varepsilon_{14} = \frac{1}{2}\left(u_{1,4} + u_{4,1}\right) = \frac{1}{2}r\left(d + \varphi'\right), \tag{2}$$

oraz naprężenia

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11} = Ed'\omega, \quad \tau_{14} = 2G\varepsilon_{14} = Gr(d+\varphi'). \tag{3}$$

3. Całkowita energia potencjalna – równania równowagi

Całkowita energia potencjalna składa się z następujących składników

$$V = U - L = U_B + U_\omega + U_S - L, \tag{4}$$

gdzie poszczególne składniki mają postać

$$\begin{cases} U_B = \dfrac{1}{2}\int_V \sigma_{11}\varepsilon_{11} dV = \dfrac{1}{2} EI_\omega \int_l d'^2\, dx, \\ U_\omega = \int_V \tau_{14}\varepsilon_{14} dV = \dfrac{1}{2} GI_r \int_l (d+\varphi')^2 dx, \quad I_r = \int_A r^2 dA, \\ U_S = \dfrac{1}{2} GI_S \int_l \varphi'^2\, dx, \\ L = m\int_l \varphi dx. \end{cases} \tag{5}$$

Ostatecznie, z warunku stacjonarności energii potencjalnej: *δV=0,* otrzymujemy dwa różniczkowe równania równowagi w przemieszczeniach

$$\begin{cases} -\left(GI_r + GI_S\right)\varphi'' - GI_r d' = m, \\ -EI_\omega d'' + GI_r d + GI_r \varphi' = 0, \end{cases} \tag{6}$$

z warunkami brzegowymi

$$\begin{cases} \text{Zamocowanie:} \quad \varphi = 0,\ d = 0, \\ \text{Swobodny brzeg:} \quad B = EI_\omega d' = 0,\ M = M_S + M_\omega = GI_S\varphi' + GI_r(\varphi' + d) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Literatura

[1] VLASOV V., Z., Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations Jerusalem, 1961.

[2] GJELSVIK A., The Theory of Thin Walled Bars, John Wiley & Sons, New York, 1981.

[3] OBRĘBSKI J., B., Cienkościenne sprężyste pręty proste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1999.

[4] PAVAZZA R., MATOKOVIĆ A., VUKOSOVIĆ M., A theory of torsion of thin-walled beams of arbitrary open sections with influence of shear, Mechanics Based Design of Structures and Machines, An International Journal, Vol. 50, 2022 – Issue 1, p. 206-241.

[5] ERKMEN R., E., MOHAREB M., Torsion analysis of thin-walled beams including shear deformations effects, Thin-Walled Structures, Vol. 44, Issue 10, October 2006, p.1096-1108.