

# Sterowanie adaptacyjne i rozproszone w zagadnieniach tłumienia drgań konstrukcji

*Spotkanie Sekcji Optymalizacji KM PAN, 20.05.2022*

*Dominik Pisarski*

Institut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Pawińskiego 5b, 02-106, Warszawa



# Motywacje

**Obserwacje:**

- ▶ Szybki wzrost skali i złożoności konstrukcji inżynierii lądowej i mechanicznej;
- ▶ Układy wielkoskalowe są szczególnie wrażliwe na działanie zaburzeń i wymagają niezawodnych systemów sterowania do prawidłowej i bezpiecznej eksploatacji.



**Tłumienie drgań mechanicznych, grupy problemów:**

- ▶ Stabilizacja;
- ▶ Sterowanie optymalne;
- ▶ Sterowanie adaptacyjne.

- ▶ Find  $u^* = u(x, t)$  such that  $\dot{V}(x) < 0$  for all  $x \neq 0$ .
- ▶ Find  $u^{**} = \min \int_0^T F(x, u, t) dt$ , subject to  $\dot{x} = f(x, u, t)$ .
- ▶ Update  $u^*$  or  $u^{**}$  as system parameters change.

# Motywacje

## Obserwacje:

- ▶ Szybki wzrost skali i złożoności konstrukcji inżynierii lądowej i mechanicznej;
- ▶ Układy wielkoskalowe są szczególnie wrażliwe na działania zaburzeń i wymagają niezawodnych systemów sterowania do prawidłowej i bezpiecznej eksploatacji.



## Tłumienie drgań mechanicznych, grupy problemów:

- ▶ Stabilizacja;
- ▶ Sterowanie optymalne;
- ▶ Sterowanie adaptacyjne.

- ▶ Find  $u^* = u(x, t)$  such that  $\dot{V}(x) < 0$  for all  $x \neq 0$ .
- ▶ Find  $u^{**} = \min \int_0^T F(x, u, t) dt$ , subject to  $\dot{x} = f(x, u, t)$ .
- ▶ Update  $u^*$  or  $u^{**}$  as system parameters change.

## Zastosowanie tradycyjnych metod sterowania do układów wielkoskalowych:

- ▶ **Sterowanie scentralizowane** - brak skalowalności (procedury obliczeniowe/osprzęt);
- ▶ **Sterowanie zdecentralizowane** - nieskoordynowane działanie sterowników (niestabilność).

# Motywacje

## Obserwacje:

- ▶ Szybki wzrost skali i złożoności konstrukcji inżynierii lądowej i mechanicznej;
- ▶ Układy wielkoskalowe są szczególnie wrażliwe na działanie zaburzeń i wymagają niezawodnych systemów sterowania do prawidłowej i bezpiecznej eksploatacji.



## Tłumienie drgań mechanicznych, grupy problemów:

- ▶ Stabilizacja;
- ▶ Sterowanie optymalne;
- ▶ Sterowanie adaptacyjne.

- ▶ Find  $u^* = u(x, t)$  such that  $\dot{V}(x) < 0$  for all  $x \neq 0$ .
- ▶ Find  $u^{**} = \min \int_0^T F(x, u, t) dt$ , subject to  $\dot{x} = f(x, u, t)$ .
- ▶ Update  $u^*$  or  $u^{**}$  as system parameters change.

## Zastosowanie tradycyjnych metod sterowania do układów wielkoskalowych:

- ▶ **Sterowanie scentralizowane** - brak skalowalności (procedury obliczeniowe/osprzęt);
- ▶ **Sterowanie zdecentralizowane** - nieskoordynowane działanie sterowników (niestabilność).

## Alternatywa...? Sterowanie rozproszone - skoordynowane działanie sterowników

- ▶ Kompromis między wydajnością i praktycznością;
- ▶ Systemy rozproszone to obecnie najszybciej rozwijany kierunek inżynierii sterowania.

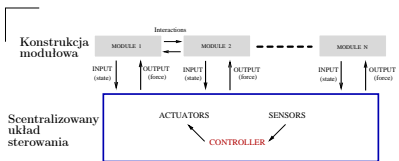
# Motywacje

- ▶ Opracowanie rozproszonych metod stabilizacji i optymalnego sterowania konstrukcji o architekturze modułowej.



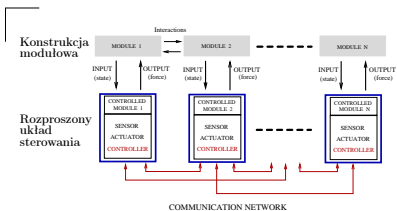
# Motywacje

- Opracowanie rozproszonych metod stabilizacji i optymalnego sterowania konstrukcji o architekturze modułowej.



# Motywacje

- Opracowanie rozproszonych metod stabilizacji i optymalnego sterowania konstrukcji o architekturze modułowej.









# Sformułowanie problemu sterowania rozproszonego/adaptacyjnego

Rozważmy poddany działaniu drgań mechanicznych układ opisany równaniem stanu:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), a(t), F(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

- ▶  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$  – wektor stanu;
- ▶  $u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$  – wektor sterowania;
- ▶  $a(t) \in \mathcal{R}^k$  – wektor zmiennych w czasie parametrów;
- ▶  $F(t) \in \mathcal{R}^l$  – wektor wymuszenia.

## Sterowanie rozproszone:

Każda z funkcji sterujących  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , zależy od lokalnego wektora zmiennych stanu  $x_i \in \mathcal{X}_i \subset \mathcal{R}^{n_i}$ :

$$u_i = u_i(x_i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Wektor  $x_i$  utworzony jest z elementów globalnego wektora zmiennych stanu  $x$ , a rozmiar wektora  $x_i$  jest znacząco mniejszy od rozmiaru wektora  $x$  (tzn.  $n_i \ll n$ ).

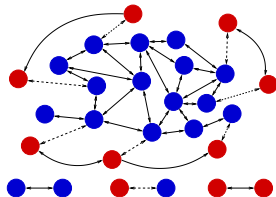


Fig. 1. Konstrukcja przedstawiona w postaci zbioru sprzężonych dynamicznie podukładów (niebieskie punkty) sterowana przy użyciu sterownika o architekturze rozproszonej (czerwone punkty).

# Sformułowanie problemu sterowania rozproszonego/adaptacyjnego

Rozważmy poddany działaniu drgań mechanicznych układ opisany równaniem stanu:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), a(t), F(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

- ▶  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$  – wektor stanu;
- ▶  $u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$  – wektor sterowania;
- ▶  $a(t) \in \mathcal{R}^k$  – wektor zmiennych w czasie parametrów;
- ▶  $F(t) \in \mathcal{R}^l$  – wektor wymuszenia.

## Sterowanie adaptacyjne:

Każda z funkcji sterujących  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , reaguje na zmiany parametrów wewnętrznych  $a(t)$  i/lub wymuszenia zewnętrznego  $F(t)$ :

$$u_i = u_i(a(t), F(t)), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Modyfikacja sterowania, która jest odpowiedzią na zmiany parametrów układów, może przebiegać w sposób ciągły lub okresowy.

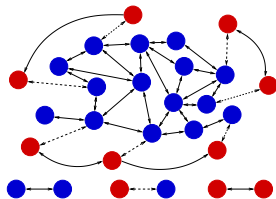


Fig. 1. Konstrukcja przedstawiona w postaci zbioru sprzężonych dynamicznie podukładów (niebieskie punkty) sterowana przy użyciu sterownika o architekturze rozproszonej (czerwone punkty).

# Stformułowanie problemu sterowania rozproszonego/adaptacyjnego

Rozważmy poddany działaniu drgań mechanicznych układ opisany równaniem stanu:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), a(t), F(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

- ▶  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathcal{R}^n$  – wektor stanu;
- ▶  $u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^m$  – wektor sterowania;
- ▶  $a(t) \in \mathcal{R}^k$  – wektor zmiennych w czasie parametrów;
- ▶  $F(t) \in \mathcal{R}^l$  – wektor wymuszenia.

## Konstrukcje aktywne (sterowanie siłowe):

$$\dot{x}(t) = f_s(x(t), a(t), F(t)) + f_u(u(t)). \quad (2)$$

- ▶ Konstrukcje wyposażone w siłowniki hydrauliczne, napędy elektryczne.

## Konstrukcje półaktywne (sterowanie parametryczne):

$$\dot{x}(t) = f_s(x(t), a(t), F(t)) + f_u(x(t), u(t)). \quad (3)$$

- ▶ Konstrukcje wyposażone w tłumiki oparte o działanie materiałów inteligentnych (cieczce reologiczne, elastomery).

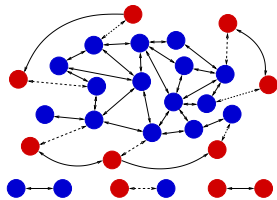


Fig. 1. Konstrukcja przedstawiona w postaci zbioru sprzężonych dynamicznie podukładów (niebieskie punkty) sterowana przy użyciu sterownika o architekturze rozproszonej (czerwone punkty).



## Wyzwania i cele badawcze

- ▶ opracowanie wydajnych (suboptymalnych) metod sterowania rozproszonego i adaptacyjnego do tłumienia drgań konstrukcji;
- ▶ zapewnienie skalowalności procedur obliczeniowych;
- ▶ kompleksowa weryfikacja opracowanych metod (drgania swobodne, wymuszone oraz samowzbudne).

### Modelowanie/obserwacja stanu:

- ▶ opracowanie zastępczych modeli dynamicznych pozwalających na tworzenie rozproszonych struktur funkcji sterowania;
- ▶ opracowanie modeli ewolucyjnych na użytek redukcji modelu konstrukcji oraz prognozowania charakterystyk wymuszenia;
- ▶ redukcja liczby punktów pomiarowych oraz długości transmisji danych pomiarowych.

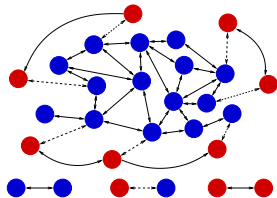


Fig. 1. Konstrukcja przedstawiona w postaci zbioru sprzężonych dynamicznie podukładów (niebieskie punkty) sterowana przy użyciu sterownika o architekturze rozproszonej (czerwone punkty).

## Wyzwania i cele badawcze

- ▶ opracowanie wydajnych (suboptymalnych) metod sterowania rozproszonego i adaptacyjnego do tłumienia drgań konstrukcji;
- ▶ zapewnienie skalowalności procedur obliczeniowych;
- ▶ kompleksowa weryfikacja opracowanych metod (drgania swobodne, wymuszone oraz samowzbudne).

### Sterowanie:

- ▶ poszukiwanie praw sterowania oraz struktur lokalnych pętli sprzężenia zwrotnego, które odnajdują kompromis między wydajnością i prostotą w implementacji **systemu rozproszonego**;
- ▶ opracowanie wydajnych algorytmów numerycznych wykorzystujących obliczenia równoległe, by umożliwić częstą aktualizację **sterowania adaptacyjnego**;

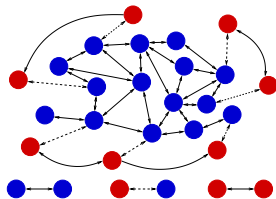


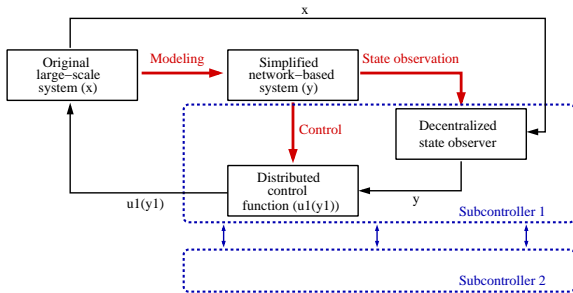
Fig. 1. Konstrukcja przedstawiona w postaci zbioru sprzężonych dynamicznie podukładów (niebieskie punkty) sterowana przy użyciu sterownika o architekturze rozproszonej (czerwone punkty).



## Wyzwania i cele badawcze

- ▶ opracowanie wydajnych (suboptymalnych) metod sterowania rozproszonego i adaptacyjnego do tłumienia drgań konstrukcji;
- ▶ zapewnienie skalowalności procedur obliczeniowych;
- ▶ kompleksowa weryfikacja opracowanych metod (drgania swobodne, wymuszone oraz samowzbudne).

### Zastosowanie do wielkoskalowego problemu tłumienia drgań mechanicznych:



# Przegląd literatury

## Sterowanie rozproszone - konstrukcje aktywne i półaktywne

- ▶ Bakule L, Papik M, Rehak B. Decentralized stabilization of large-scale civil structures. Proc 19th IFAC World Congress. 2014;47 (3):10427-10432.
- ▶ Bakule L, Paulet-Crainiceanu F, Rodellar J, Rossell JM. Overlapping reliable control for a cable-stayed bridge benchmark. IEEE Trans Control Syst Technol. 2005;13(4):663-669.
- ▶ Verdoljak RD, Linderman LE. Sparse feedback structures for control of civil systems. Struct Control Health Monitor. 2016;23 (11):1334-1349.
- ▶ Mroz A, Orłowska A, Holnicki-Szulc J. Semi-active damping of vibrations. Prestress accumulation-release strategy development. Shock Vibrat. 2010;17(2):123-136.
- ▶ Popławski B, Mikułowski G, Mróz A, Jankowski L. Decentralized semi-active damping of free structural vibrations by means of structural nodes with an on/off ability to transmit moments. Mech Syst Signal Process. 2018;100:926-939.
- ▶ Cha YJ, Agrawal AK. Decentralized output feedback polynomial control of seismically excited structures using genetic algorithm. Struct Control Health Monitor. 2013;20:241-258.
- ▶ McClamroch NH, Gavin HP. Closed loop structural control using electrorheological dampers. In: 1995 American Control Conference; 1995; Seattle, WA, USA:4173-4177.
- ▶ Florez AJ, Felipe Giraldo LF. Structural sparsity in control design of active and semi-active systems. Struct Control Health Monitor. 2021;28(8):1-15.
- ▶ Pisarski D. Distributed control design for structures subjected to traveling loads. Math Probl Eng. 2015;2015:1-12.

# Przegląd literatury

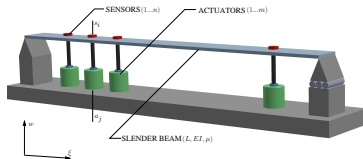
## Sterowanie adaptacyjne - metody i zastosowania

- ▶ Bordons C, Camacho EF. A generalized predictive controller for a wide class of industrial processes. IEEE Trans Control Syst Technol. 1998;6(3):372-387.
- ▶ Spudic V, Conte C, Boatic M, Morari M. Cooperative distributed model predictive control for wind farms. Optimal Control Appl Methods. 2015;36(3):333-352.
- ▶ Zhou Z, De Schutter B, Lin S, Xi Y. Two-Level Hierarchical Model-Based Predictive Control for Large-Scale Urban Traffic Networks. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2017;25(2):496-508.
- ▶ Oveisi A, Hosseini-Pishrobat M, Nestorović T, Keighobadi J. Observer-based repetitive model predictive control in active vibration suppression. Structural Control and Health Monitoring 2018;25(5):1-23.
- ▶ Takacs G, Rohal-Ilkiv B. Model predictive control algorithms for active vibration control: a study on timing, performance and implementation properties. Journal of Vibration and Control 2013;20(13):2061–2080.
- ▶ Dengler C, Lohmann B. Actor-critic reinforcement learning for the feedback control of a swinging chain. IFAC Papers 2018;51:378–383.



## Problem badawczy [A1]

- ▶ Praca dotyczy stabilizacji drgań swobodnych konstrukcji nośnej (belka swobodnie podparta);
- ▶ Do sterowania założono tłumiki półaktywne o zmiennym parametrze tłumienia i sztywności.



Równanie dynamiczne układu:

$$EI \frac{\partial^4 w(\xi, t)}{\partial \xi^4} + \mu \frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial t^2} = - \sum_{j=1}^m \left( k_j(u_j) w(a_j, t) + c_j(u_j) \frac{\partial w(a_j, t)}{\partial t} \right) \delta(\xi - a_j). \quad (4)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial \xi^2} = 0. \quad (5)$$

Zakładamy niezerowe ugięcie wstępne

$$w(\xi, 0) = w_0(\xi) \quad (6)$$

oraz liniowe zależności sztywności/tłumienia względem sterowania

$$k_j(u_j) = k u_j, \quad c_j(u_j) = c u_j. \quad (7)$$

- ▶ Celem jest znalezienie sterowania, które stabilizuje układ (4) do punktu równowagi  $w = 0$  oraz spełnia warunek:

$$u_j = u_j(w_{a_j}, \dot{w}_{a_j}), \quad j = 1, \dots, m. \quad (8)$$

## Metodologia [A1]

- Korzystając z metody rozdzielania zmiennych przybliżone rozwiązanie równania dynamicznego (4) może być przedstawione w postaci:

$$w(\xi, t) = \sum_{k=1}^K V_k(t) W_k(\xi). \quad (9)$$

Funkcje bazowe  $W_1(\xi), \dots, W_K(\xi)$  zostaną w sposób, by spełnić warunek decentralizacji. Wektor stanu  $x(t) = [x^1(t)^T, x^2(t)^T]^T \in \mathcal{X} \subset \mathbf{R}^{2K}$  zdefiniowany jest następująco:

$$x^1(t) = [x_1^1(t), \dots, x_K^1(t)]^T = [V_1(t), \dots, V_K(t)]^T, \quad x^2(t) = [x_1^2(t), \dots, x_K^2(t)]^T = [\dot{V}_1(t), \dots, \dot{V}_K(t)]^T. \quad (10)$$

Po uwzględnieniu (9) oraz (10) równanie dynamiczne (4) przyjmuje postać:

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m u_j B_j x, \quad x(0) = x_0. \quad (11)$$

Zakładamy funkcje sterowania  $u_j \in \mathcal{U} = [u_{min}, u_{max}]$ :

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{min}, & x^T(t) P B_j x(t) \geq 0, \\ u_{max}, & x^T(t) P B_j x(t) < 0. \end{cases} \quad (12)$$

Macierz  $P$  wyznaczana jest z równania Lapunowa:

$$(A^T + \sum_{j=1}^m u_{max} B_j^T) P + P(A + \sum_{j=1}^m u_{max} B_j) - Q = 0, \quad Q \succ 0. \quad (13)$$

# Metodologia [A1]

## Charakterystyka układu:

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m u_j B_j x, \quad x(0) = x_0. \quad (14)$$

$$u_j(t) = \begin{cases} u_{min}, & x^T(t) P B_j x(t) \geq 0, \\ u_{max}, & x^T(t) P B_j x(t) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

(\*) Sterowanie (15) gwarantuje stabilność asymptotyczną układu (14).

(\*\*) W przypadku, gdy spełnione są łącznie warunki (16)–(18)

$$A = \begin{pmatrix} Z & I \\ A^1 & Z \end{pmatrix}, \quad A^1 - \text{diagonalna}, \quad (16)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} Z & Z \\ B^{1,j} & B^{2,j} \end{pmatrix}, \quad B^{1,j} = (B_{kl}^{1,j})_{K \times K}, \quad B^{2,j} = (B_{kl}^{2,j})_{K \times K} - \text{elementy niezerowe } kl = jj, \quad (17)$$

$$Q = \begin{pmatrix} Q^1 & Z \\ Z & Q^2 \end{pmatrix}, \quad Q^1, Q^2 - \text{diagonalne}, \quad (18)$$

sterowanie (15) gwarantuje  $u_j = u_j(w_{a_j}, \dot{w}_{a_j})$ .

## Metodologia [A1]

**Szkic dowodu (\*)** Zakładamy funkcję Lapunowa w postaci  $V = x^T P x$  oraz wyznaczamy jej pochodną względem czasu:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}. \quad (19)$$

Uwzględniając równanie dynamiczne (14) otrzymujemy

$$\dot{V} = x^T A^T P x + x^T P A x + \sum_{j=1}^m u_j x^T B_j^T P x + \sum_{j=1}^m u_j x^T P B_j x, \quad (20)$$

co można zapisać w postaci

$$\dot{V} = x^T (A^T + \sum_{j=1}^m u_{max} B_j^T) P x + x^T P (A + \sum_{j=1}^m u_{max} B_j) x + \sum_{j=1}^m (u_j - u_{max}) x^T B_j^T P x + \sum_{j=1}^m (u_j - u_{max}) x^T P B_j x. \quad (21)$$

Z równania Lapunowa (13) oraz symetrii  $P = P^T$  ostatecznie otrzymujemy

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2 \sum_{j=1}^m (u_j - u_{max}) x^T P B_j x. \quad (22)$$

Stosując sterowanie przełączające (15) otrzymujemy

$$\sum_{j=1}^m (u_j - u_{max}) x^T P B_j x \leq 0. \quad (23)$$

Założenie  $Q \succ 0$  oraz (23) gwarantują  $\dot{V} < 0$  dla każdego  $x$ .



## Metodologia [A1]

**Szkic dowodu (\*\*)** Rozwiązanie równania Lapunowa (13) zapiszemy w postaci:

$$P = \begin{pmatrix} P^1 & P^2 \\ P^2 & P^3 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Wstawiając (16)-(18) do równania Lapunowa (13) otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} Z & A^1 + \sum_{j=1}^m u_{max} B^{1,j} \\ I & \sum_{j=1}^m u_{max} B^{2,j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^1 & P^2 \\ P^2 & P^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P^1 & P^2 \\ P^2 & P^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z & I \\ A^1 + \sum_{j=1}^m u_{max} B^{1,j} & \sum_{j=1}^m u_{max} B^{2,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^1 & Z \\ Z & Q^2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Po wykonaniu mnożenia i porównaniu lewych górnych klatek macierzy otrzymujemy:

$$P^2 = \frac{1}{2} (A^1 + \sum_{j=1}^m u_{max} B^{1,j})^{-1} Q^1. \quad (26)$$

Diagonalne struktury macierzy  $(A^1 + \sum_{j=1}^m u_{max} B^{1,j})$  oraz  $Q^1$  implikują, że macierz  $P^2$  jest diagonalna. Podobnie możemy pokazać diagonalne struktury macierzy  $P^1$  oraz  $P^3$ . Ostatecznie możemy pokazać, że forma kwadratowa

$$x^T(t) P B_j x(t) = (x^1(t))^T P^1 B^{1,j} x^1(t) + (x^1(t))^T P^2 B^{2,j} x^2(t) + (x^2(t))^T P^2 B^{1,j} x^1(t) + (x^2(t))^T P^3 B^{2,j} x^2(t) \quad (27)$$

zależy wyłącznie od elementów wektora stanu  $x_j^1$  and  $x_j^2$ , które odpowiadają  $w(a_j)$  and  $\dot{w}(a_j)$ .

## Metodologia [A1]

- Aby uzyskać pożądane struktury macierzy układu

$$\dot{x} = Ax + \sum_{j=1}^m u_j B_j x, \quad x(0) = x_0. \quad (28)$$

Zakładamy przybliżone rozwiązanie równania cząstkowego (4) w postaci:

$$w(\xi, t) = \sum_{k=1}^K V_k(t) W_k(\xi). \quad (29)$$

oraz wektor stanu  $x = [V_1, \dots, V_K, \dot{V}_1, \dots, \dot{V}_K]^T$  równania (28).

- Oznaczając  $\langle W, U \rangle = \int_0^L W(\xi) U(\xi) f(\xi) d\xi$  oraz stosując metodę Galerkinia możemy pokazać, że wymagania dotyczące struktury macierzy  $A$  oraz  $B_j, j = 1, \dots, m$  układu (28) są spełnione jeśli:

$$\langle W_k, W_l \rangle = 0 \quad \forall k \neq l \quad (30)$$

$$\langle W_k, d^4 W_l / d\xi^4 \rangle = 0 \quad \forall k \neq l \quad (31)$$

$$W_k(a_j) W_l(a_j) \neq 0 \quad \text{iff} \quad k = l = j \quad \forall j, k, l. \quad (32)$$

Przyjmujemy bazę w postaci:

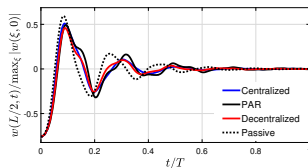
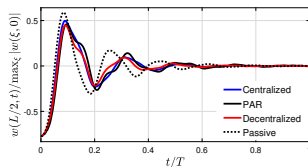
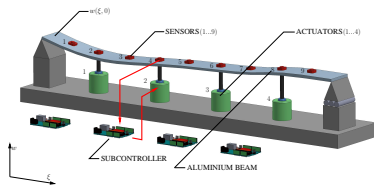
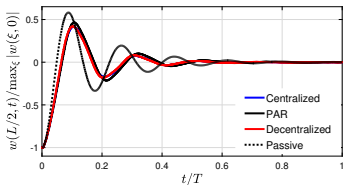
$$W_k(\xi) = \sum_{j=0}^N a_{k,j} \xi^j, \quad k = 1, \dots, K. \quad (33)$$

oraz funkcje wagowe  $f$ , aby możliwie spełnić (30) oraz (31). Parametr funkcji wagowej zostaje zoptymalizowany, aby znaleźć kompromis między warunkami (30) oraz (31).

## Podsumowanie wyników [A1]

- ▶ Weryfikację metody przeprowadzono w przypadku drgań swobodnych belki wyposażonej w tłumiki półaktywne.
- ▶ Zestawienie wartości funkcji celu:

	Centralized	Decentralized	Heuristic	Passive
Case A	0.5354	0.5509	0.5779	1.0000
Case B	0.6048	0.6270	0.6785	1.0000
Case C	0.7275	0.7332	0.8603	1.0000
Case D	0.7586	0.7989	0.9510	1.0000





## Problem badawczy [A2]

Rozważamy konstrukcję półaktywną, której dynamika opisana jest dwuliniowym równaniem stanu:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^m u_j(t) B_j x(t), \quad x(0) = x_0. \quad (37)$$

$$u_j(t) \in [u_{min}, u_{max}] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (38)$$

$A$  oraz  $B_j, j = 1, 2, \dots, m$  są macierzami o stałych wartościach.

### Problem sterowania rozproszonego

- ▶ Problem dotyczy **stabilizacji układu (37)** zaburzonego przez zadanie warunku początkowego  $x_0$  (ugięcie wstępne). Celem jest znalezienie funkcji sterowania  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , które skutkują tym, że trajektoria układu  $x$  zbiega do punktu równowagi  $x = 0$  (z optymalnym wskaźnikiem zbieżności).
- ▶ **Funkcje sterownia charakteryzuje struktura rozproszona:**

$$u_j = u_j(\{x_i\}_{i \in \mathcal{G}_j}), \quad j = 1, \dots, m. \quad (39)$$

# Metodologia [A2]

- Wstępnie, analizujemy problem sterowania optymalnego w pętli otwartej.

## Problem sterowania optymalnego

$$\text{Find } u^* = \{u_j^*\}_{j=1}^m \text{ minimizing } J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T x^T Q x \, dt \quad (40)$$

$$\text{Subject to } \dot{x} = A x + \sum_{j=1}^m u_j B_j x, \quad x(0) = x_0, \quad u_j \in [u_{min}, u_{max}], \quad j = 1, \dots, m.$$

- Rozwiązanie:

$$u_j^* = \begin{cases} u_{max}, & p^T B_j x > 0, \\ u \in [u_{min}, u_{max}], & p^T B_j x = 0, \\ u_{min}, & p^T B_j x < 0. \end{cases}, \quad (41)$$

gdzie

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad p(T) = 0, \quad (42)$$

$$H(x, p, \{u_j\}_{j=1, \dots, m}) = p^T \left( A x + \sum_{j=1}^m u_j B_j x \right) - \frac{1}{2} x^T Q x. \quad (43)$$

## Metodologia [A2]

- ▶ Wprowadzamy aproksymację przełączanego prawa sterowania (41):

$$u_j(t) = - \left( c_1 + c_2 \arctan (x^T(t)K_j x(t)) \right), \quad j = 1, \dots, m, \quad (44)$$

gdzie:

$$c_1 = -(u_{min} + u_{max})/2, \quad c_2 = (u_{min} - u_{max})/\pi \quad (45)$$

oraz

$$K_j \in \mathcal{K}_j = [k_{ab}^j] : \begin{cases} k_{ab}^j \in [k_{min}, k_{max}], & \text{if } a \in \mathcal{G}_j \wedge b \in \mathcal{G}_j, \\ k_{ab}^j = 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (46)$$

- ▶ (45) gwarantuje  $u_j \in [u_{min}, u_{max}]$ ,  $j = 1, \dots, m$ .
- ▶ (46) gwarantuje rozproszoną strukturę funkcji sterowania  $u_j = u_j(\{x_i\}_{i \in \mathcal{G}_j})$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

### Problem optymalnego sterowania rozproszonego

$$\text{Find } \{K_j^*\}_{j=1, \dots, m} \text{ minimizing } J(K_j) = \frac{1}{2} \int_0^T x^T Q x dt$$

$$\text{Subject to } \dot{x} = A x - \sum_{j=1}^m \left( c_1 + c_2 \arctan (x^T K_j x) \right) B_j x, \quad x(0) = x_0, \quad K_j \in \mathcal{K}_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (47)$$

## Metodologia [A2]

- Do rozwiązania problemu optymalnego sterowania rozproszonego opracowano procedurę iteracyjną wykorzystującą metodę najszybszego spadku, gdzie pochodna funkcjonału celu  $J$  względem  $K_j$  jest w postaci:

$$\frac{dJ(K_j)}{dK_j} = - \int_0^T \frac{\partial H}{\partial K_j} dt = c_2 \int_0^T p^T B_j x \frac{x x^T}{(x^T K_j x)^2 + 1} dt, \quad (48)$$

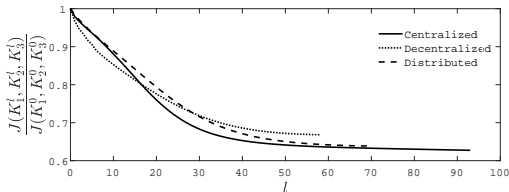
gdzie

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial H(x, p, \{K_j\}_{j=1, \dots, m})}{\partial x}, \quad p(T) = 0 \quad (49)$$

oraz

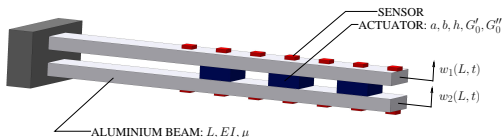
$$H(x, p, \{K_j\}_{j=1, \dots, m}) = p^T \left( A x - \sum_{j=1}^m \left( c_1 + c_2 \arctan(x^T K_j x) \right) B_j x \right) - \frac{1}{2} x^T Q x. \quad (50)$$

- Ilustracja zbieżności procedury optymalizacji:





## Analizowany układ [A2]



- ▶ 14 czujników przemieszczeń.
- ▶ 3 półaktywne bloki elastomerowe.

Beam parameters

Beam length ( $L$ )	1 [m]
Young modulus ( $E$ )	69 [GPa]
Moment of inertia ( $I$ )	$7.03 \times 10^{-12}$ [m <sup>4</sup> ]
Density per length ( $\rho$ )	0.101 [kg/m]

Damping blocks parameters

Dimensions ( $a, b, h$ )	(0.0175, 0.0250, 0.005) [m]
Storage modulus at $u = 0$ ( $G_0'$ )	$5 \times 10^4$ [Pa]
Loss modulus at $u = 0$ ( $G_0''$ )	$9 \times 10^3$ [Pa]

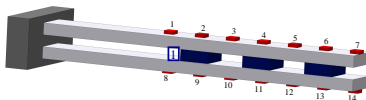
## Analizowany układ [A2]

► Architektura scentralizowana:

$$\mathcal{G}_1 = \{1, \dots, 14\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{1, \dots, 14\},$$

$$\mathcal{G}_3 = \{1, \dots, 14\}.$$

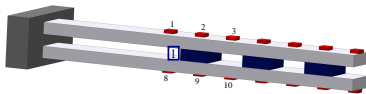


► Architektura rozproszona:

$$\mathcal{G}_1 = \{1, 2, 3, 8, 9, 10\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{3, 4, 5, 10, 11, 12\},$$

$$\mathcal{G}_3 = \{5, 6, 7, 12, 13, 14\}.$$

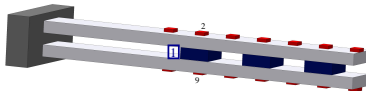


► Architektura zdecentralizowana:

$$\mathcal{G}_1 = \{2, 9\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{4, 11\},$$

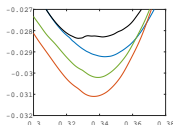
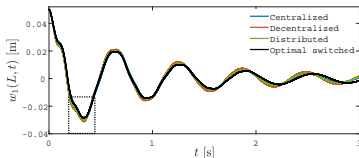
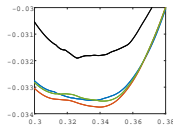
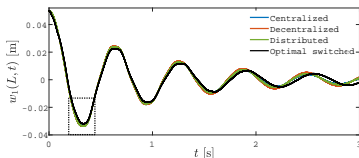
$$\mathcal{G}_3 = \{6, 13\}.$$



## Podsumowanie wyników [A2]

- ▶ Rozważono trzy przypadki ugięcia wstępnego belek (1 mod, 1+2 mod, 1+2+3 mod).
- ▶ Porównanie wartości wskaźnika jakości  $J = \int_0^T x(t)^T Q x(t) dt$  (znormalizowanych do przypadku tłumienia pasywnego  $u = u_{max}$ ):

	Suboptimal control / Heuristic control			Optimal control
	Centralized	Decentralized	Distributed	
Case A	0.4718 / 0.5552	0.5031 / 0.6727	0.4803 / 0.6686	0.4683
Case B	0.4766 / 0.5568	0.5234 / 0.6843	0.4983 / 0.6749	0.4776
Case C	0.6001 / 0.6271	0.6267 / 0.7488	0.5892 / 0.7466	0.5246



## Problem badawczy [A3]

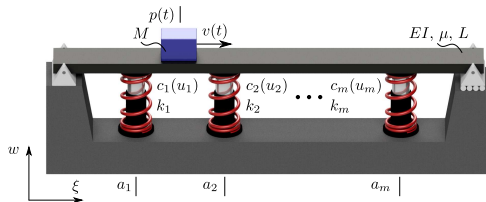
- ▶ Analizowany problem dotyczył półaktywnej konstrukcji nośnej poddanej ruchomemu obciążeniu o zmiennej prędkości. Celem sterowania była redukcja drgań konstrukcji oraz zapewnienie bezpiecznego przejazdu obciążenia.

$$\mu \frac{\partial^2 w(\xi, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(\xi, t)}{\partial \xi^4} = - \sum_{j=1}^m \left( k_j w(a_j, t) + c_j(u_j(t)) \frac{\partial w(a_j, t)}{\partial t} \right) \delta(\xi - a_j) - N \delta(\xi - p(t)). \quad (51)$$

- ▶ Założenie: prędkość obciążenia  $v(t)$  jest mierzalna w każdej chwili  $t$ .

Celem było opracowanie **algorytmu adaptacyjnego**, który na podstawie pomiarów prędkości  $v$  aktualizuje funkcje sterowania  $u_1, \dots, u_m$ .

- ▶ Wymagania: funkcja sterowania zależy w sposób jawny od stanu konstrukcji; Niski koszt obliczeniowy przy zmianie prędkości obciążenia.



## Metodologia [A3]

- Reprezentacja układu w postaci RRZ:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \left( \mathbf{A}_b + \sum_{j=1}^m u_j(t) \mathbf{B}_{b,j} \right) \mathbf{y}(t) + \mathbf{D}\mathbf{F}(t), \quad \mathbf{y}(0) = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T. \quad (52)$$

- Obserwacja: wymuszenie  $\mathbf{F}$  można przedstawić w formie równania dynamicznego

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_i(t) \\ \ddot{\mathbf{F}}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I} \\ -\frac{\pi^2 v_j^2}{L^2} \mathbf{H}^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \dot{\mathbf{F}}_i(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad (53)$$

co pozwala sprowadzić układ (52) do postaci:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left( \mathbf{A}(v_i) + \sum_{j=1}^m u_j(t) \mathbf{B}_j \right) \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_i) = \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \mathbf{F}_i(t_i) \\ \dot{\mathbf{F}}_i(t_i) \end{bmatrix}. \quad (54)$$

- Dla układu (54) przyjęto sterowanie:

$$u_j(\mathbf{x}) = -\operatorname{sgn} \left( \mathbf{x}^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_j \mathbf{x} \right), \quad \mathbf{0} = \bar{\mathbf{A}}^T(v_i, \mathbf{u}_0^*) \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i \bar{\mathbf{A}}(v_i, \mathbf{u}_0^*) + \mathbf{Q}. \quad (55)$$

- Sterowanie (55) gwarantuje stabilność asymptotyczną (54) (Proposition 1) oraz korzystniejszą wartość wskaźnika jakości w porównaniu do optymalnej strategii pasywnej (Proposition 2).

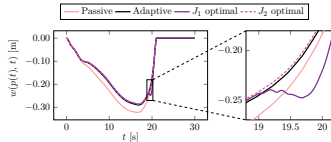
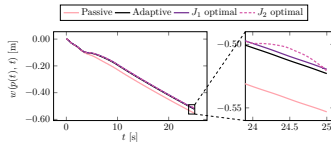
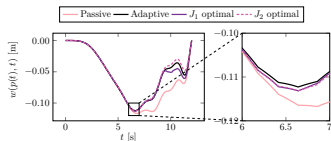
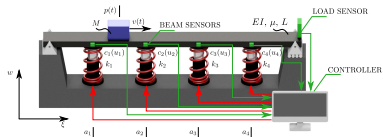
## Podsumowanie wyników [A3]

- ▶ Analizie poddana została konstrukcja podparta na czterech tłumikach półaktywnych. Przeanalizowano trzy przypadki przejazdu obciążenia, uwzględniając przyspieszenia, spowolnienia oraz chwilowe zatrzymanie.

- ▶ Przypadek 1: ruch obciążenia ze stałym przyspieszeniem. Pogorszenie o 2.6% względem rozwiązania optymalnego.

- ▶ Przypadek 2: ruch obciążenia ze stałym opóźnieniem, aż do zatrzymania w połowie długości konstrukcji. Pogorszenie o 1.0% względem rozwiązania optymalnego.

- ▶ Przypadek 3: trajektoria prędkości obciążenia obejmowała odcinki z opóźnieniem oraz przyspieszeniem. Pogorszenie o 0.7% względem rozwiązania optymalnego.



## Problem badawczy [A4]

- ▶ Przedmiotem badań był wielokondygnacyjny aktywnie sterowany budynek poddany działaniu trzęsienia ziemi opisany dyskretnym dynamicznym równaniem stanu:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{D}v_k, \quad (56)$$

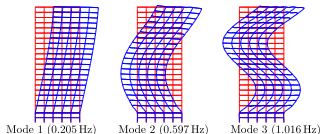
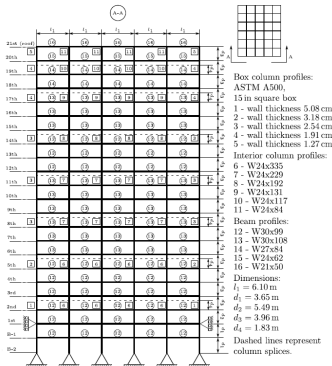
$$\mathbf{x}_{k=0} = \mathbf{x}_0, \quad k = 0, 1 \dots$$

- ▶ Założenie: zaburzenie  $v_k$  jest mierzalne dla każdej chwili  $k$ .

Celem było opracowanie **algorytmu adaptacyjnego**, który na podstawie pomiarów zaburzenia  $v$  aktualizuje funkcję sterowania  $u$  będącą rozwiązaniem zadania sterowania optymalnego z funkcją celu:

$$J = \sum_{k=s_j}^{N+s_j} (\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k^T \mathbf{R} \mathbf{u}_k). \quad (57)$$

- ▶ Wymagania: niski koszt obliczeniowy ze względu na rozmiar układu oraz losowy charakter zaburzenia.



[A4] Wasilewski M., Pisarski D., Bajer C.I., Adaptive optimal control for seismically excited structures, *Automation in Construction*, Vol.106, pp.102885-1-18, 2019



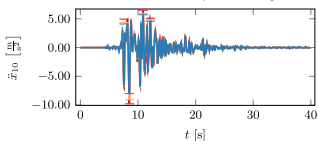
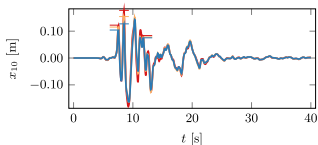
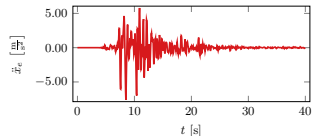


## Podsumowanie wyników [A4]

- Analizie poddany został 20-kondygnacyjny budynek. Sygnały zaburzeń pochodziły z pomiarów trzęsień ziemi w Kobe (1995) oraz El Centro (1940).

Criterion	description
$J_1 = \max_{t,i}  x_i(t) $	Floor Displacement
$J_2 = \max_{t,i} \left  \frac{d_i(t)}{l_i} \right $	Interstory Drift
$J_3 = \max_{t,i}  \ddot{x}_i(t) $	Floor Acceleration
$J_4 = \max_t \left  \sum_{i=2}^{21} m_i \ddot{x}_i(t) \right $	Base Shear
$J_5 = \max_i \ x_i(t)\ $	Normalized Floor Displacement
$J_6 = \max_i \left\  \frac{d_i(t)}{l_i} \right\ $	Normalized Interstory Drift
$J_7 = \max_i \ \ddot{x}_i(t)\ $	Normalized Floor Acceleration
$J_8 = \left\  \sum_{i=2}^{21} m_i \ddot{x}_i(t) \right\ $	Normalized Base Shear

Crit.	Kobe			El Centro		
	Adapt.	LQG	H <sub>∞</sub>	Adapt.	LQG	H <sub>∞</sub>
J <sub>1</sub>	1.0000	1.0148	1.0256	1.000	1.0109	1.0050
J <sub>2</sub>	1.0000	1.3599	1.9983	1.000	1.1224	1.6362
J <sub>3</sub>	1.0000	1.0772	1.2165	1.000	1.1410	1.3143
J <sub>4</sub>	1.0000	1.1071	1.1793	1.000	1.1266	1.1365
J <sub>5</sub>	1.0000	1.0398	1.0331	1.000	1.0017	1.0104
J <sub>6</sub>	1.0000	1.0566	1.2102	1.000	1.0551	1.0518
J <sub>7</sub>	1.0000	1.1106	1.2455	1.000	1.1024	1.2307
J <sub>8</sub>	1.0000	1.0812	1.1197	1.000	1.0925	1.1251
J <sub>x(T)</sub>	1.0000	1.1137	1.4121	1.0000	1.0838	1.2199
<b>Avg.</b>	<b>1.000</b>	<b>1.1762</b>	<b>1.2669</b>	<b>1.000</b>	<b>1.0921</b>	<b>1.1922</b>



# Podziękowania

Serdeczne podziękowania dla współautorów prezentowanych prac:

- ▶ Prof. dr hab. inż. Czesław Bajer (IPPT PAN)
- ▶ dr hab. inż. Andrzej Myśliński (IBS PAN)
- ▶ dr inż. Robert Konowrocki (IPPT PAN)
- ▶ dr inż. Tomasz Szmidt (IPPT PAN)
- ▶ dr inż. Maciej Wasilewski